PITAGORAS
ACADEMIA

TRIGONOMETRÍA

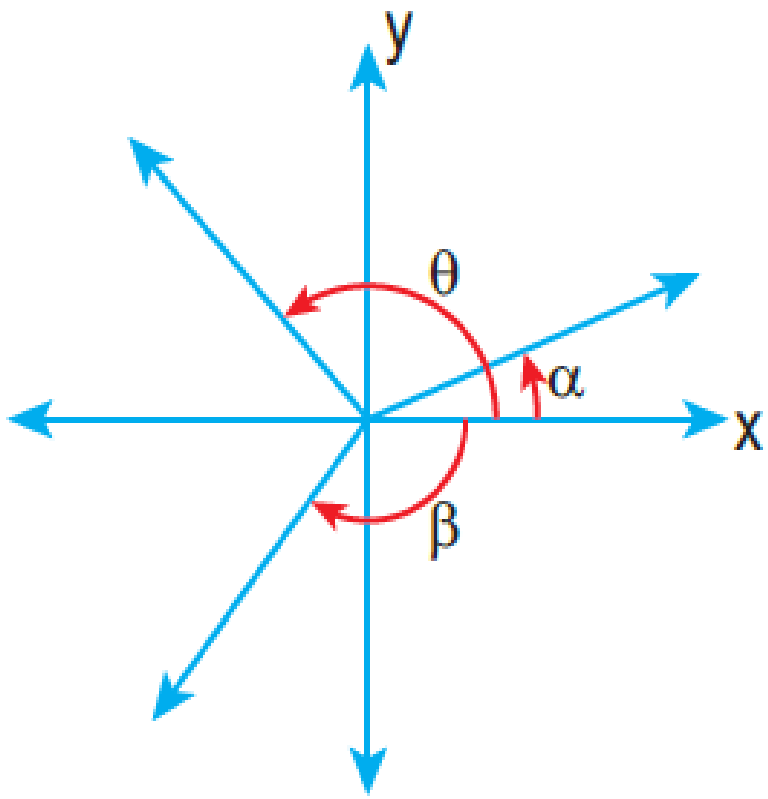
Profesor
DAVIS REYES

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

ÁNGULO EN POSICIÓN ESTANDAR

Un ángulo está en posición normal si su vértice está en el origen de un sistema coordenadas y su lado inicial coincide con el eje positivo de las abscisas. Observa el siguiente gráfico:



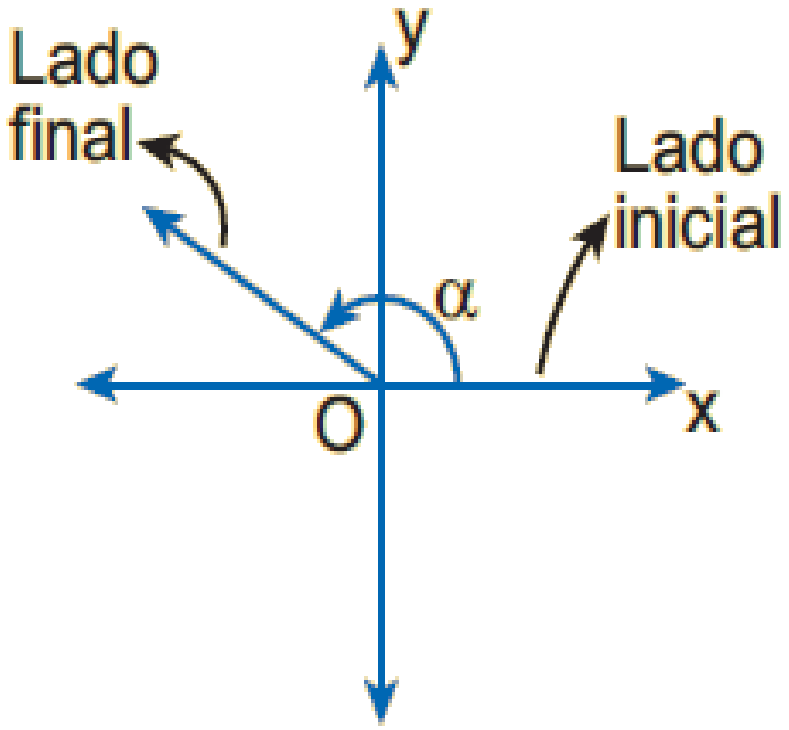
$\alpha \in$ IC; $\alpha > 0$

$\theta \in$ IIC; $\theta > 0$

$\beta \in$ IIIC; $\beta < 0$

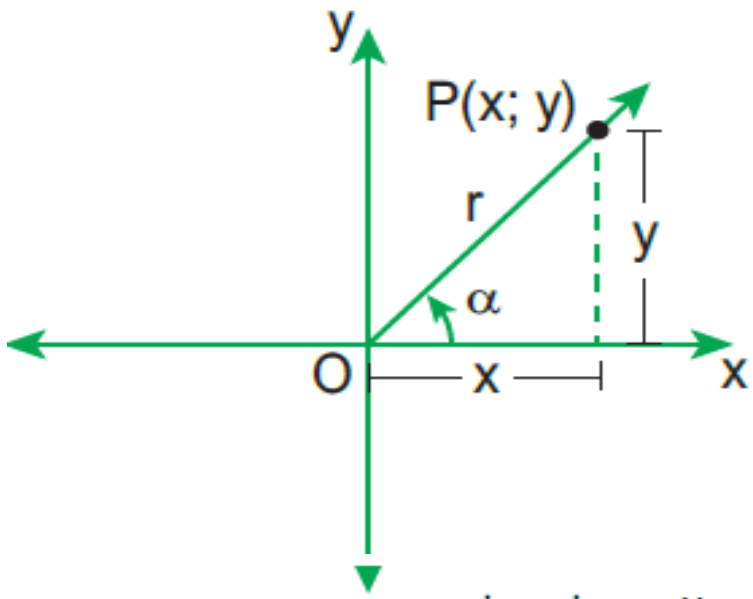
Del gráfico, α, θ y β son ángulos en posición normal.

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE



α es un ángulo en posición normal.

Las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal son:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

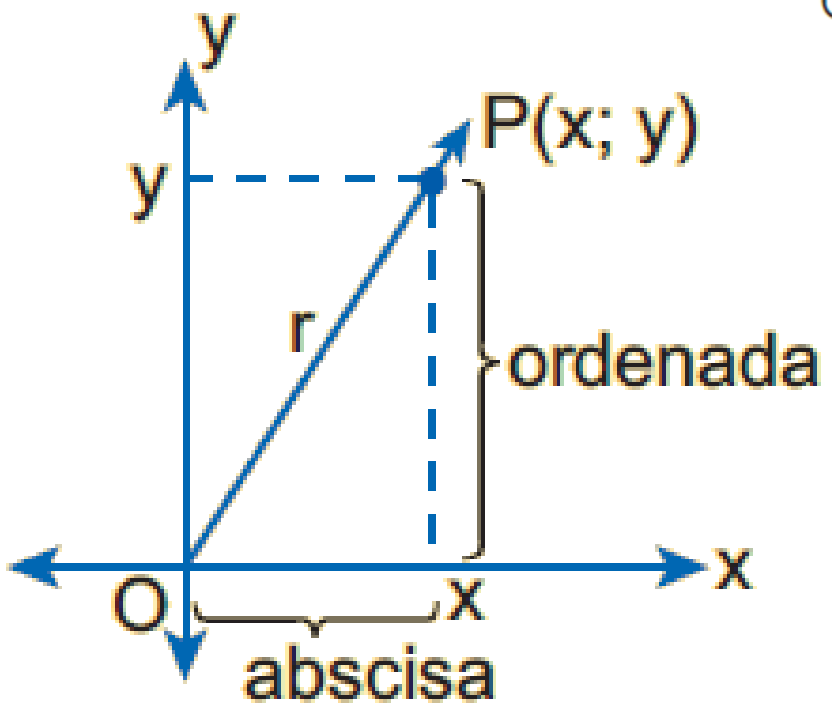
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio valor}} = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}} = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

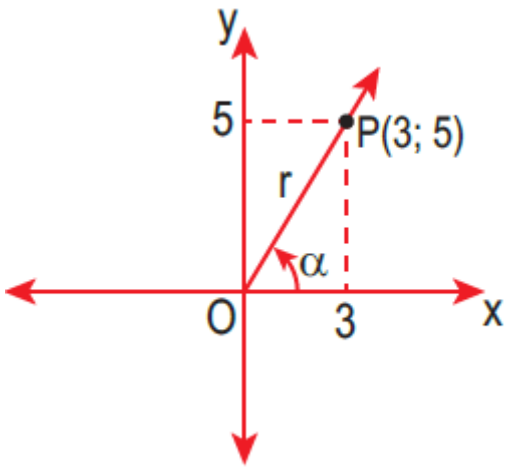
POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; r > 0$$

Ejemplo:

Observa el siguiente gráfico y calcula las razones trigonométricas del ángulo α:



Resolución:

$$r = \sqrt{(3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \qquad \csc\alpha = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

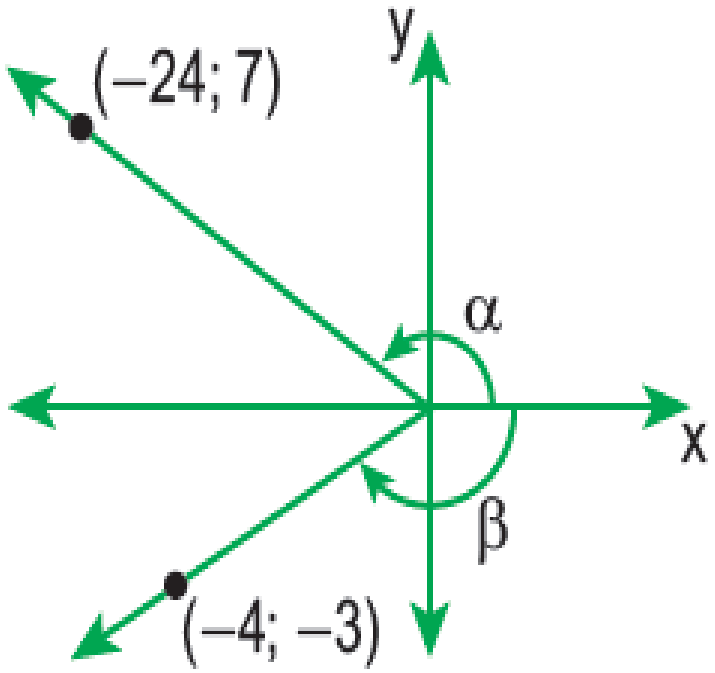
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \qquad \sec\alpha = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{5}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{3}{5}$$

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

Del gráfico, calcula:

$P = \cos\beta - 5\cos\alpha$

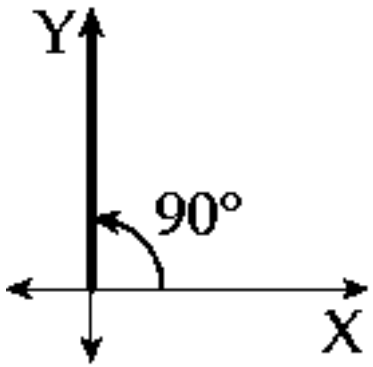


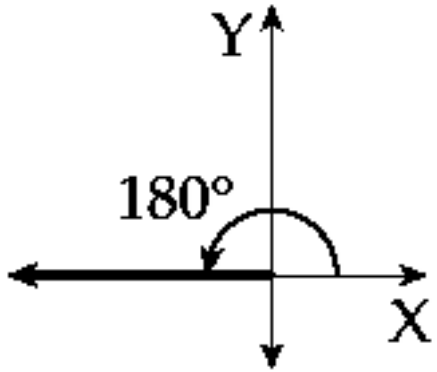
A) 2 B) -2 C) 4 D) 3 E) -4

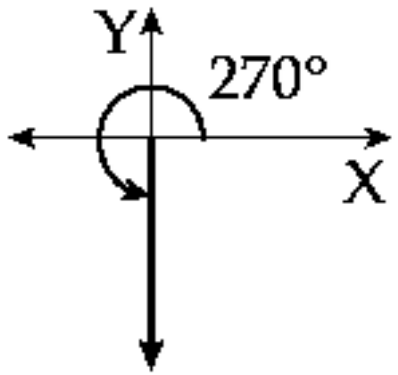
POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

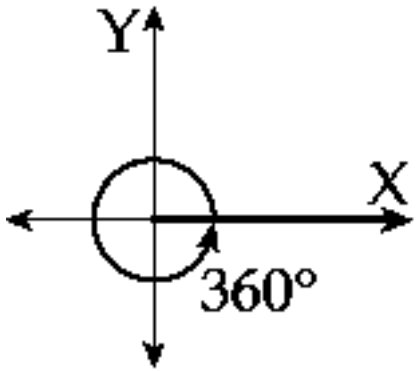
Los ángulos en posición normal cuyo lado terminal coincide con uno de los semiejes del plano Cartesiano se denominan cuadrantales y son de la forma;

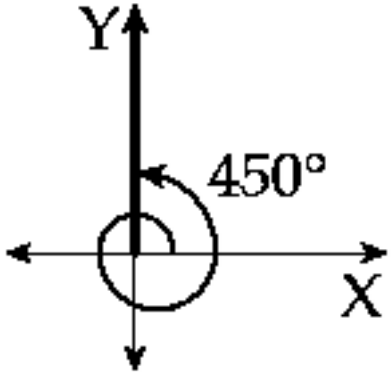


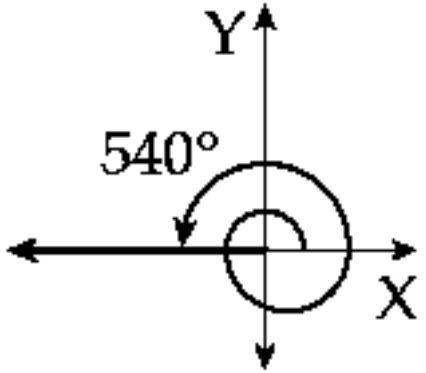




$\theta = 90°k = \frac{\pi}{2}k \; ; \; k \in Z$

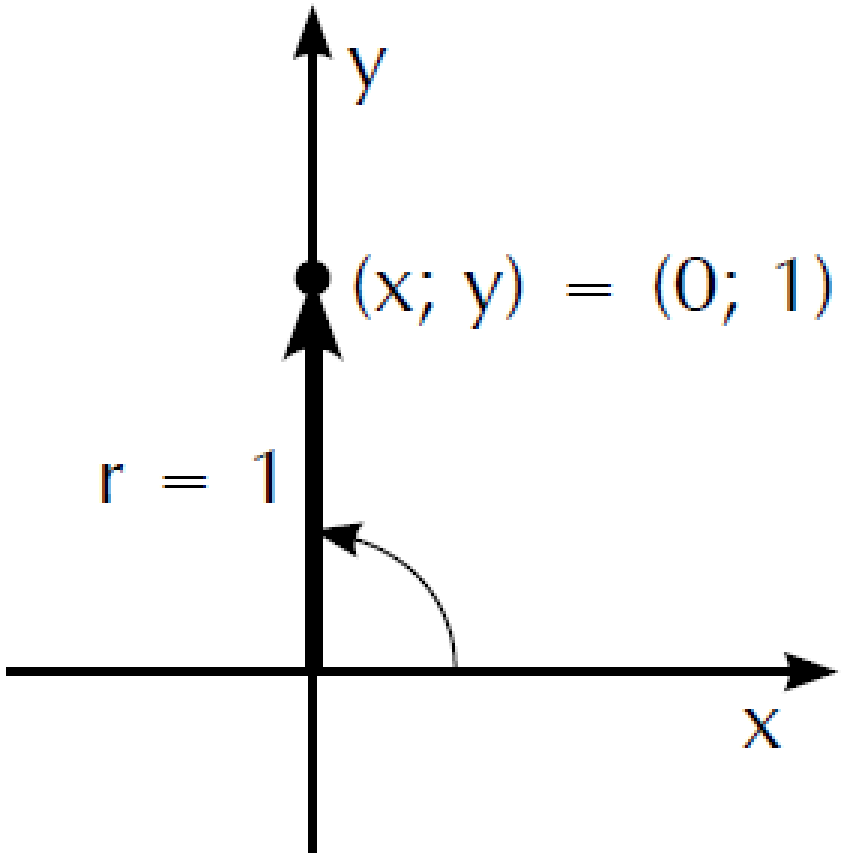






POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

Ejemplo: Calculemos las R.T. de 90° y por simplicidad haremos que el radio vector mida 1.
el siguiente gráfico muestra un punto perteneciente al lado final del ángulo cuadrantal.



- $\text{sen}90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$
- $\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$
- $\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} =$ No definido
- $\sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} =$ No definido
- $\csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$
- $\cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

Análogamente, se calculan las R.T. de los ángulos cuadrantales cuyas medidas son 0°, 180°, 270° y 360°. Tales valores se muestran en la siguiente tabla:

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0
cot	ND	0	ND	0	ND
sec	1	ND	−1	ND	1
csc	ND	1	ND	−1	ND

Calculemos el valor de: $E = \dfrac{2\text{sen}90° - \cos 180°}{\tan 360° - \csc 270°}$

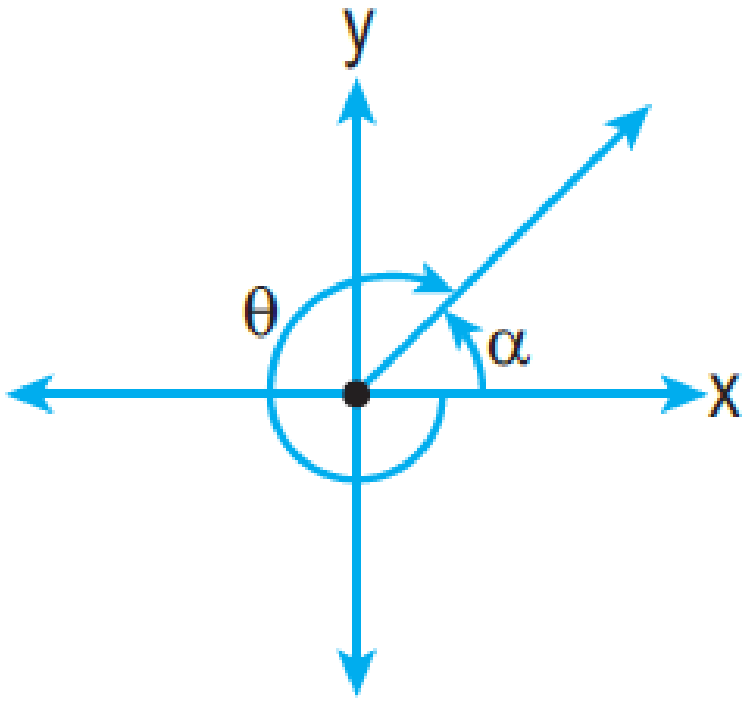
$$E = \frac{2(1) - (-1)}{0 - (-1)}$$

$$\frac{3}{1} = 3$$

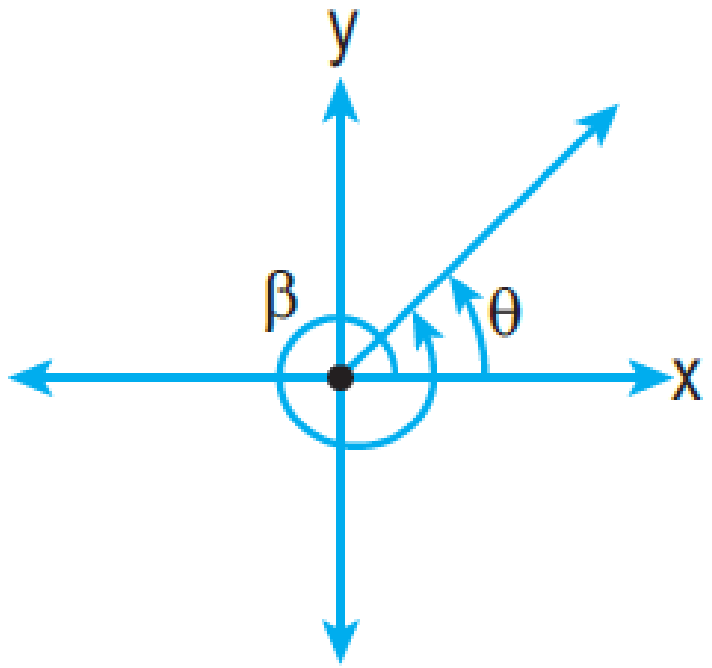
POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

ÁNGULOS CO-TERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que poseen el mismo vértice, el mismo lado inicial y final y también se diferencia en el numero de vueltas.



θ y α son ángulos coterminales



β y θ son ángulos coterminales

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COTERMINALES

Siendo a y q ángulos co-terminales, sus razones trigonométricas son iguales, es decir:

$$RT\ (\alpha) = RT\ (\theta)$$

Propiedades

Si α y θ son coterminales se cumple que:

I. $\alpha - \theta = 360^\circ n$; $n \in \mathbf{Z}$

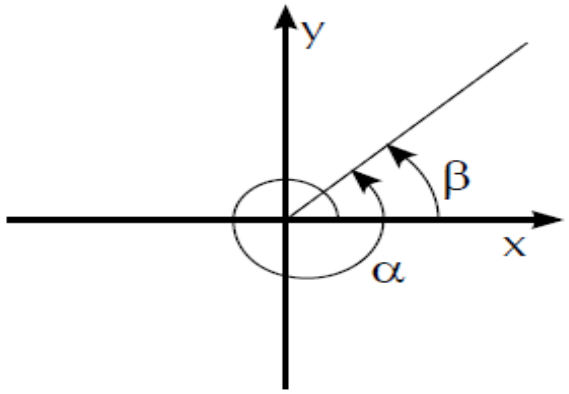
II. $R.T.(\alpha) = R.T.(\theta)$

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

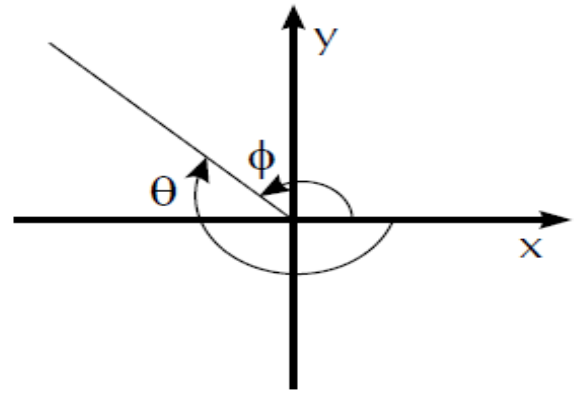
Ángulos coterminales

Dos ángulos en posición normal se llamarán coterminales o cofinales, si sus lados finales coinciden.

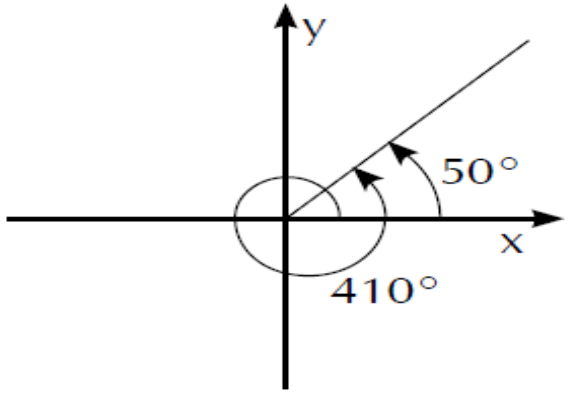
Ejemplos:



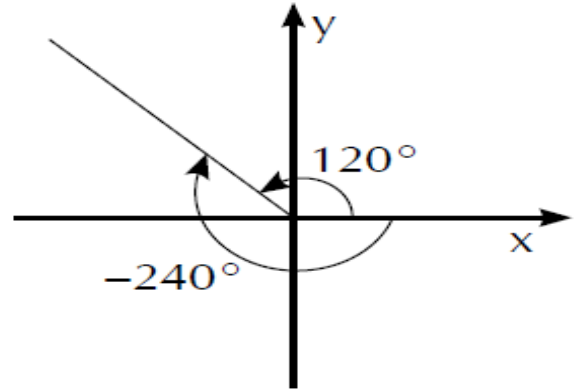
"α" y "β" son coterminales



"ϕ" y "θ" son coterminales



410° y 50° son coterminales

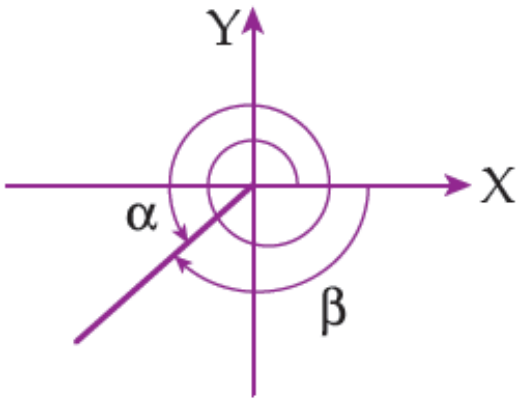


120° y −240° son coterminales

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

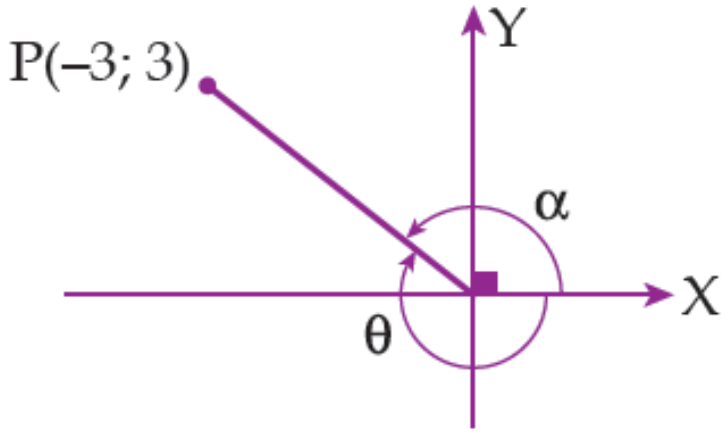
Del gráfico **calcula** $M = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Del gráfico, **calcula** $E = \tan(\alpha - \theta) + \tan\alpha$.

A) $\sqrt{2}/2$
B) $-\sqrt{2}/2$
C) -1
D) 0
E) 1

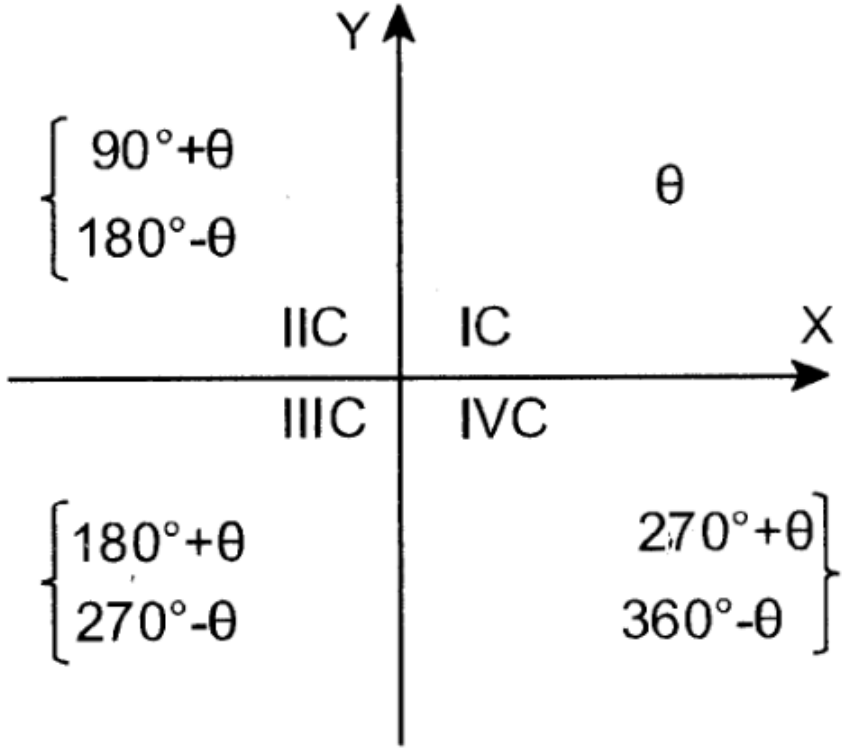


POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

REDUCCION AL PRIMER CUADRANTE

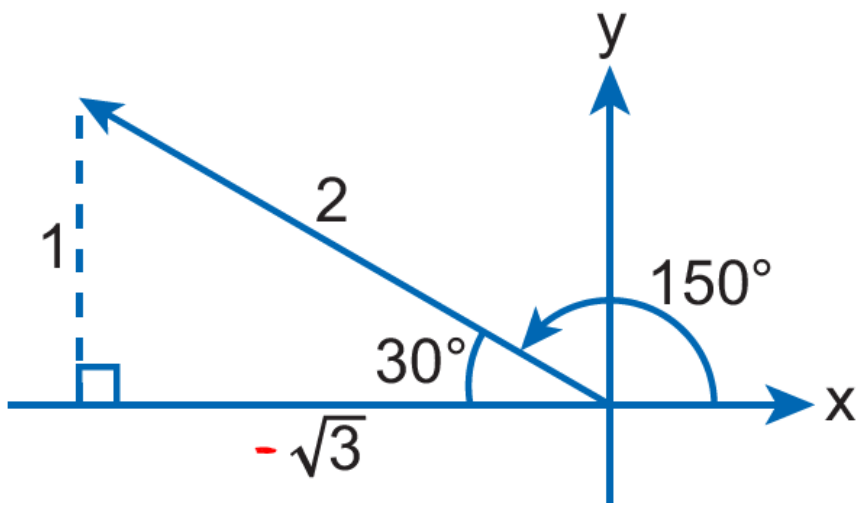
Consiste en relacionar las razones trigonométricas de ángulos en posición estándar con las Razones trigonométricas de ángulos agudos (ángulos que pertenecen al primer cuadrante)

Caso I : PARA ANGULOS POSITIVOS MENORES A UNA VUELTA



POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

- $\text{sen}150° = \text{sen}30°$



Del gráfico:

$$\text{sen}150° = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}30° = \frac{CO}{H} = \frac{1}{2}$$

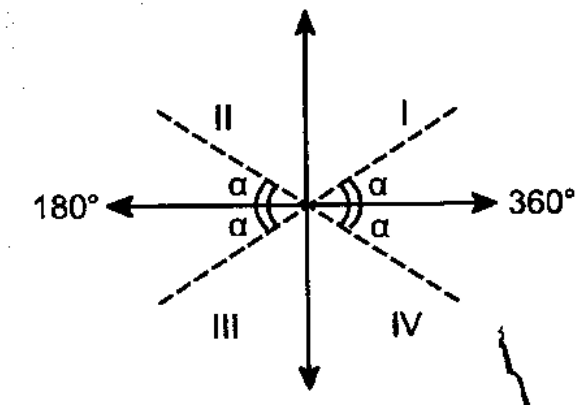
$$\therefore \text{sen}150° = \text{sen}30°$$

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

A)

$$R.T.(90° \pm \alpha) = \pm CO - RT(\alpha)$$

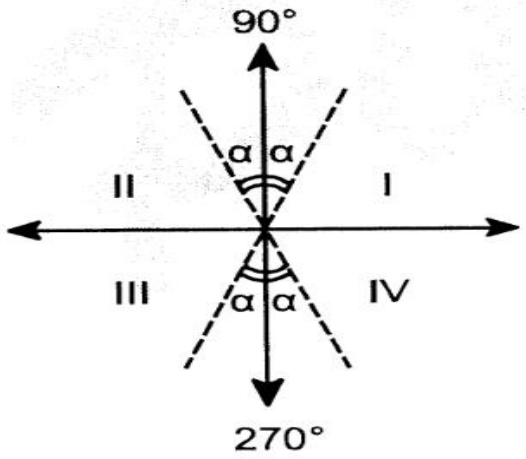
$$R.T.(270° \pm \alpha) = \pm CO - RT(\alpha)$$



B)

$$R.T.(180° \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$$

$$R.T.(360° \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$$



donde: $0° < \alpha < 90°$

Reducir al primer cuadrante

- Sen110° = Sen(90° + ...) = ...
- Cos260° = Cos(270° - .....) = ...
- Tg320° = Tg(270° + ...) = ...

Reducir al primer cuadrante

- Sen110° = Sen(180° - .....) = ...
- Cos260° = Cos(180° + ...) = ...
- Tg320° = Tg(360° - .....) = ...
- Sen(2π - α) = ...
- Tg(π + α) = ...
- Sec(π - α) = ...

Nota: El signo ± depende en qué cuadrante se encuentra el ángulo que queremos reducir.

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

Caso II : PARA ANGULOS POSITIVOS MAYORES A UNA VUELTA

$$R.T(360°n+\theta) = R.T(\theta) \quad n \in Z$$

$$R.T(2n\pi+\theta) = R.T(\theta)$$

Ejemplo: Tg1240° Tg(360°.3+160°)

1240°	360°
1080°	3
160°	

Tg(0°.3+160°)

Tg(160°) = Tg(180°-20°) = - Tg(20°)

Ejemplo: Tg4442° Tg(360°.12+122°)

4 442°	360°
360	12
842°	
720°	
122°	

Tg(122°)

Tg(90°+ 32°) = -Ctg(32°)

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

Caso III : PARA ANGULOS NEGATIVOS

Cualquiera

$Sen(-\theta) = -Sen\theta$

$Cos(-\theta) = Cos\theta$

$Tan(-\theta) = -Tan\theta$

$Cot(-\theta) = -Cot\theta$

$Sec(-\theta) = Sec\theta$

$Csc(-\theta) = -Csc\theta$

Si: $x+y = 180°$
se cumple:

$Senx = Seny$	$Cscx = Cscy$
$Cosx = -Cosy$	$Secx = -Secy$
$Tgx = -Tgy$	$Ctgx = -Ctgy$

Propiedad :

$A + B = 180°$

$Cos^nA + Cos^nB = 0$

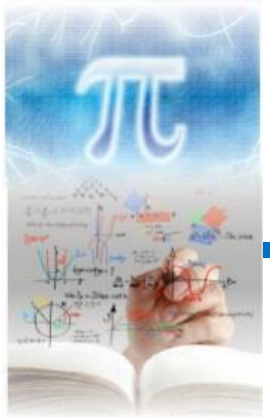
$Sec^nA + Sec^nB = 0$

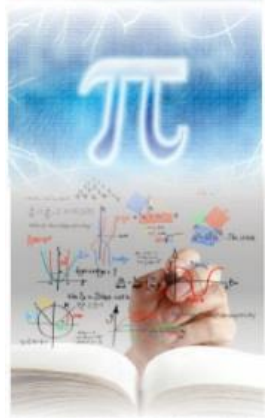
$Tan^nA + Tan^nB = 0$

$Cot^nA + Cot^nB = 0$

n : impar

MOMENTO DE PRACTICAR





PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

1. Si el punto (4; -3) pertenece al lado final del ángulo en posición normal "θ", calcular:

$R = Sec\theta + Tg\theta$

Resolución

$(x,y)=(4; -3)$

$r = 5$

Piden:

$R = Sec\theta + Tg\theta$

$R = \frac{r}{x} + \frac{y}{x}$

$R = \frac{5}{4} + \frac{-3}{4}$

$R = \frac{5-3}{4}$

$R = \frac{2}{4}$

$R = \frac{1}{2}$

A) 2 B) 1/2 C) -1/2 D) 1/3 E) -1/3

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

2. Si: $Tg\beta = -2$; $\beta \in IVC$; calcular: $R = Sec\beta + Csc\beta$

Resolución

$Tg\beta = \frac{y}{x}$

$\beta \in IVC$

$y<0 \; ; \; x>0$

$Tg\beta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{1}$

$y = -2 \; ; \; x = 1$

$r = \sqrt{5}$

$R = Sec\beta + Csc\beta$

$R = \frac{r}{x} + \frac{r}{y}$

$R = \frac{r(x+y)}{xy}$

$R = \frac{\sqrt{5}(1-2)}{(1)(-2)}$

$R = \frac{\sqrt{5}(-1)}{(-2)}$

$R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

A) $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

3. Si: $\text{Cos}\phi = -0{,}3$; $\phi \in$ IIC. Calcular:

$$E = \text{Tan}^2\phi + \text{Sec}\phi$$

Resolución

$\text{Cos}\phi = -0{,}3$

$\text{Cos}\phi = \frac{x}{r}$

; $\phi \in$ IIC

x<0 ; y >0

$\text{Cos}\phi = -0{,}3 = \frac{-3}{10} = \frac{x}{r}$

$Y = \sqrt{91}$

$E = \text{Tan}^2\phi + \text{Sec}\phi$

$E = \left[\frac{y}{x}\right]^2 + \left[\frac{r}{x}\right]$

$E = \left[\frac{\sqrt{91}}{-3}\right]^2 + \left[\frac{10}{-3}\right]$

$E = \frac{91}{9} - \left[\frac{10}{3}\right]$

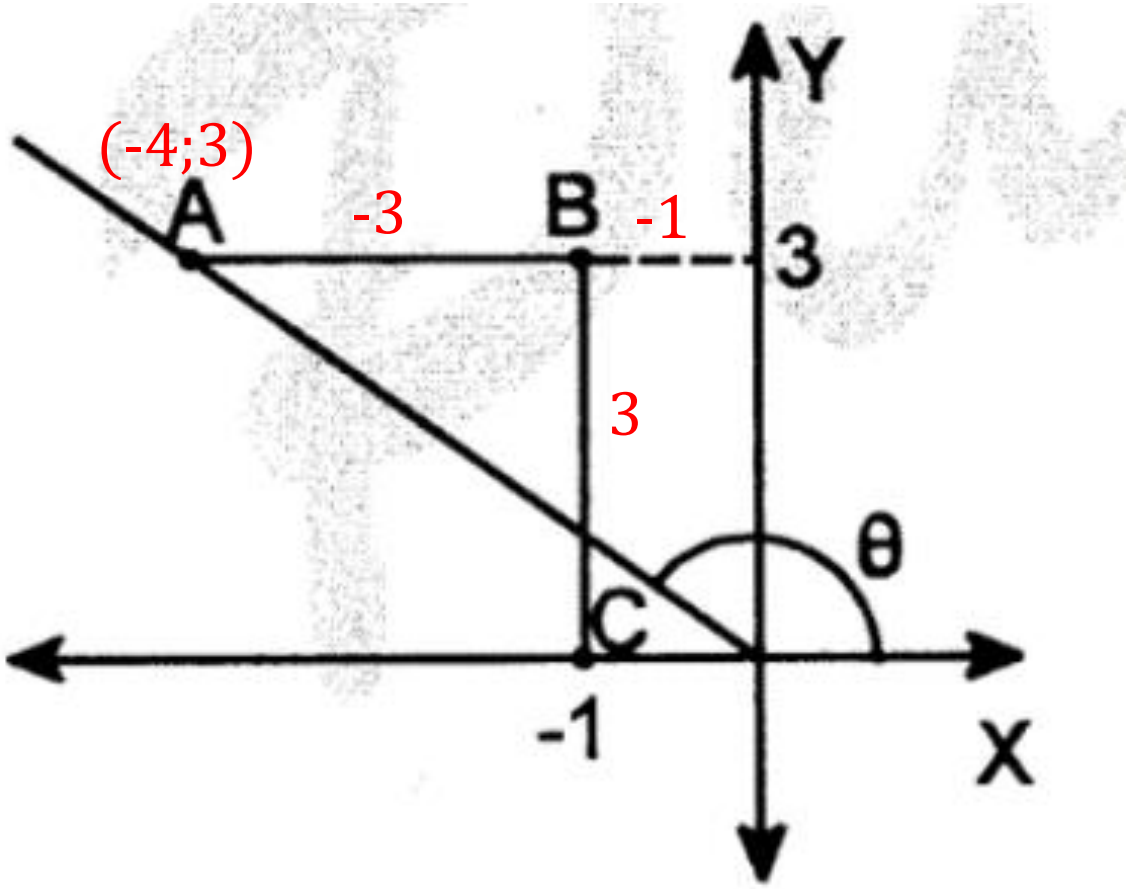
$E = \frac{91}{9} - \left[\frac{30}{9}\right]$

$E = \frac{61}{9}$

A) 61/9 B) 51/9 C) 71/9 D) 41/9 E) 31/9

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

4. Del gráfico, calcular : Tgθ Si $\overline{AB} = \overline{BC}$



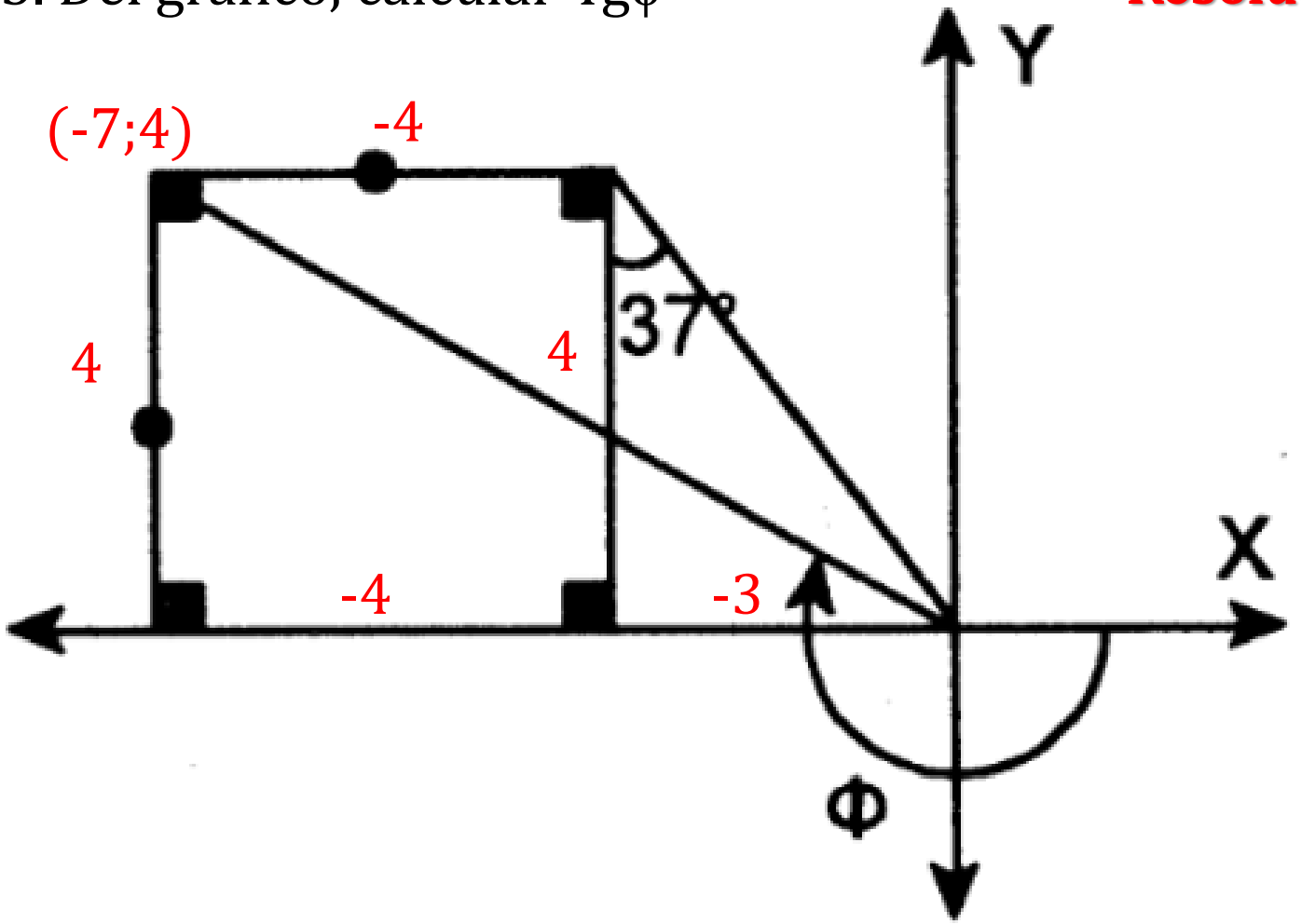
Resolución

$$\text{Tan}\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

A) -3/4 B) -4/3 C) -3/5 D) -1/2 E) -3

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

5. Del gráfico, calcular Tgϕ



Resolución

$$\text{Tan}\Phi = \frac{y}{x}$$

$$\text{Tan}\Phi = \frac{4}{-7}$$

$$\text{Tan}\Phi = -\frac{4}{7}$$

A) -7/4 B) -7/3 C) -4/7 D) -2/7 E) -3/7

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

6. Simplificar: $A = Tg400° \, Tg500° \, Tg600°$

Resolución

$A = Tg400° \, Tg500° \, Tg600°$

$A = Tg(360°+40°) \, Tg(360°+140°) \, Tg(360°+240°)$

$A = Tg(40°) \, Tg(140°) \, Tg(240°)$

$A = Tg(40°) \, Tg(180°- 40°) \, Tg(180°+60°)$

$A = Tg(40°) \, (-Tg(40°) \, Tg(60°)$

$A = Tg(40°) \, (-Tg(40°) \, (\sqrt{3})$

$A = -\sqrt{3} \, Tg^2 40$

A) $\sqrt{3} \, Tg^2 40°$ B) $\sqrt{3} \, Tg^2 50°$ C) $-\sqrt{3} \, Tg^2 40$

D) $\sqrt{3} \, Tg40°$ E) $\sqrt{3} \, Tg40°$

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

7. Determinar el valor de:

$$N = 3Tg315° + Csc240° - 8Cos120°$$

Resolución

$$N = 3Tg315° + Csc240° - 8Cos120°$$

$$N = 3Tg(360°-45°) + Csc(180°+60°) - 8Cos(180°-60°)$$

$$N = 3(-Tg45°) + (-Csc60°) - 8(-Cos60°)$$

$$N = 3(-1) + (-2) - 8\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$N = -3-2+4$$

$$N = -1$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 1/2 E) -1/2

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

8. Indicar si es verdadero (V) o falso (F):

( ) $\text{Sen}150° + \text{Cos}300° = 1$

( ) $\text{Tg}225° + \text{Ctg}315° = 2$

( ) $\text{Csc}210° + \text{Sec}300° = 0$

Resolución

A) FFV B) VVV C) FFF

D) VVF E) VFV

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

9. Simplificar:

$$A = Cos1° + Cos2° + Cos3° + \ldots + Cos179° + Cos180°$$

Resolución

$$A = Cos1° + Cos2° + Cos3° + \ldots Cos89° + Cos90° + Cos91° \ldots + Cos179° + Cos180°$$

$$A = Cos1° + Cos2° + Cos3° + \ldots Cos89° + Cos90° - Cos89° - \ldots - Cos1° + Cos180°$$

$$A = Cos90° + Cos180°$$

$$A = 0 + -1$$

$$A = -1$$

A) 1/2 B) -1/2 C) 2

D) 1 E) -1

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

10. Si α y β son complementarios

simplificar: $A = \frac{Sen(\alpha+2\beta)Tg(3\alpha+4\beta)}{Cos(2\alpha+3\beta)Tg(-\alpha)}$

Resolución

$\alpha + \beta = 90°$

$A = \frac{Sen(90°+\beta)Tg(270°+\beta)}{Cos(180°+\beta)Tg(-\alpha)}$

$A = \frac{Cos(\beta)(-Cot(\beta))}{(-Cos(\beta))(-Tg(\alpha))}$

$A = \frac{Cot(\beta)}{-Tg(\alpha)}$

$A = \frac{Tg(\alpha)}{-Tg(\alpha)}$

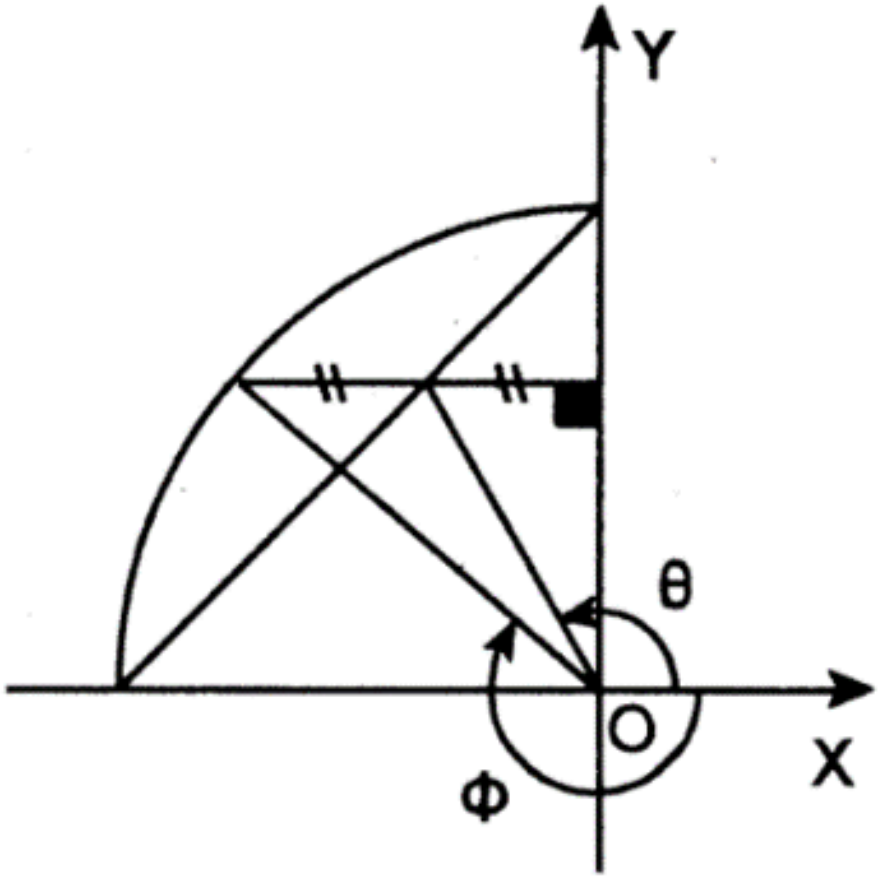
$A = -1$

A) 1 B) -1 C) 2

D) -2 E) 1/2

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

11. Del gráfico mostrado, calcule: $Tg\theta + Tg\phi$

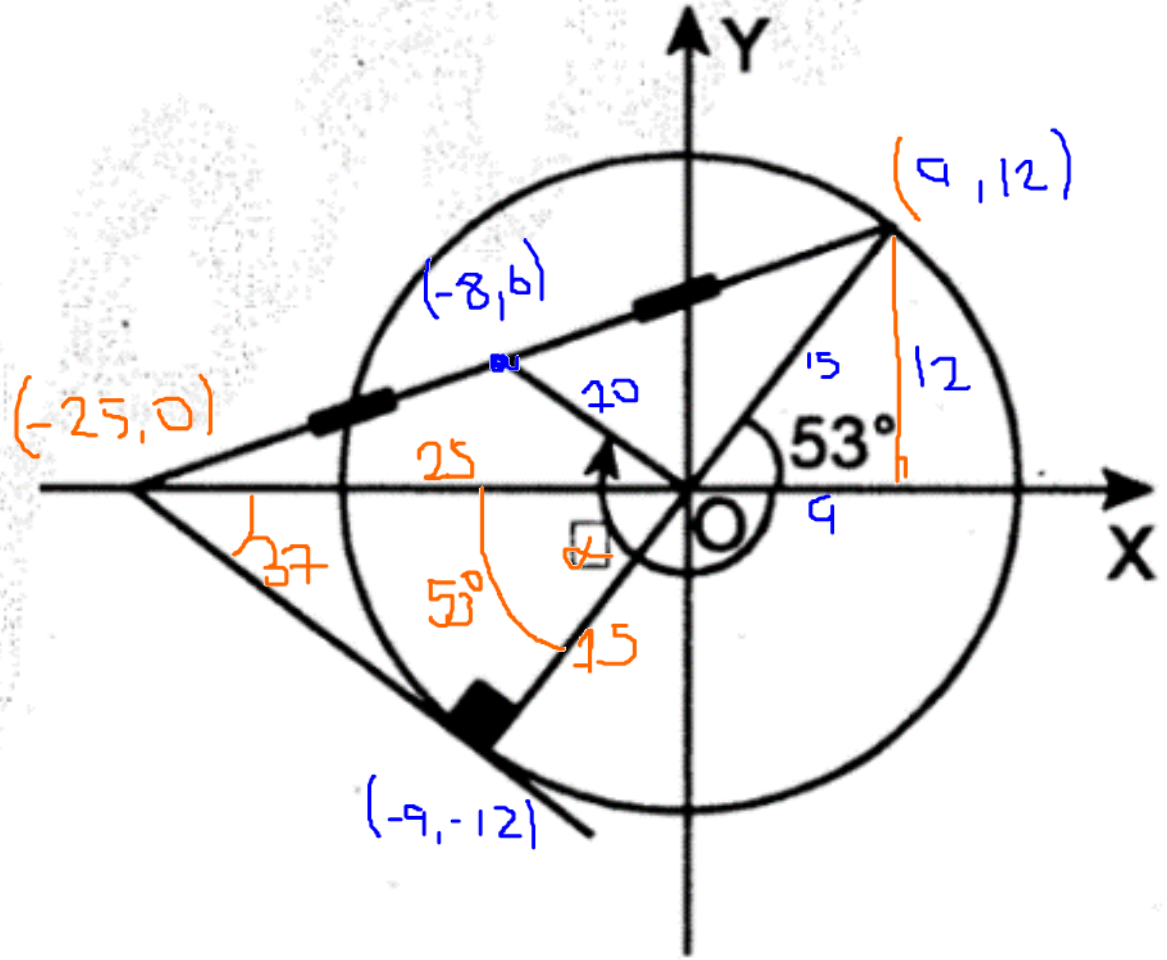


A) -3/4 B) -3/4 C) -3/2

D) -7/4 E) -9/4

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

12. Del gráfico mostrado, calcule: $3\text{Sen}\alpha - 4\text{Cos}\alpha$



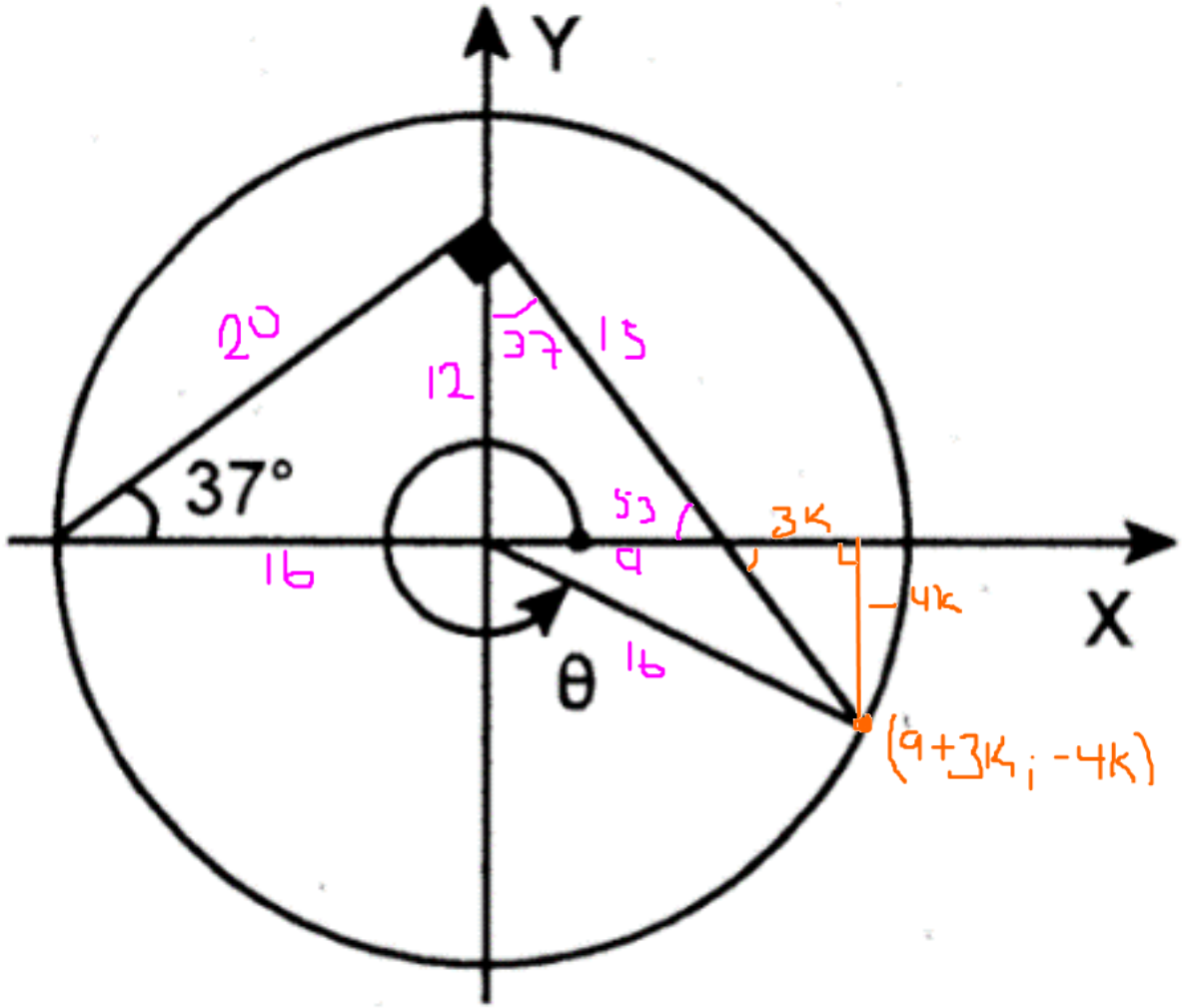
$$3\left(\frac{6}{10}\right) - 4\left(\frac{-8}{10}\right)$$

$$\frac{18}{10} + \frac{32}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

13. Del gráfico mostrado, calcule: $3\text{Sen}\theta + 4\text{Cos}\theta$



$$3\left(\frac{y}{r}\right)+4\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$3\left(\frac{-4k}{16}\right)+4\left(\frac{9+3k}{16}\right)$$

$$\frac{-12k+36+12k}{16}=\frac{36}{16}=\frac{9}{4}$$

A) 7/4 B) 9/4 C) 8/3 D) 5/9 E) 7/3

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

14. Dadas las igualdades:

$\cos\theta + |\cos\theta| = 0 \wedge (\operatorname{Sen}\theta)^{\sqrt{Sen\theta}} = \frac{1}{2}$

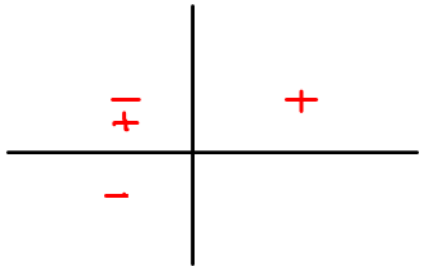
calcule el valor de:

$E = \frac{1}{5}\operatorname{Ctg}^2\theta + \operatorname{Csc}\theta$

$\cos\theta - \cos\theta = 0$

$-$

$\operatorname{Sen}\theta = +$

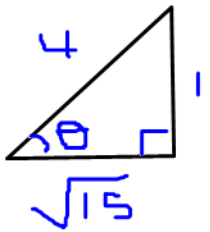


$\theta \in IIC$

$\left(5_\theta^{\sqrt{5_\theta}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{5_\theta}^{\sqrt{5_\theta}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$5_\theta = \frac{1}{4}$



$E = \frac{1}{5}\left(\frac{-\sqrt{15}}{1}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)$

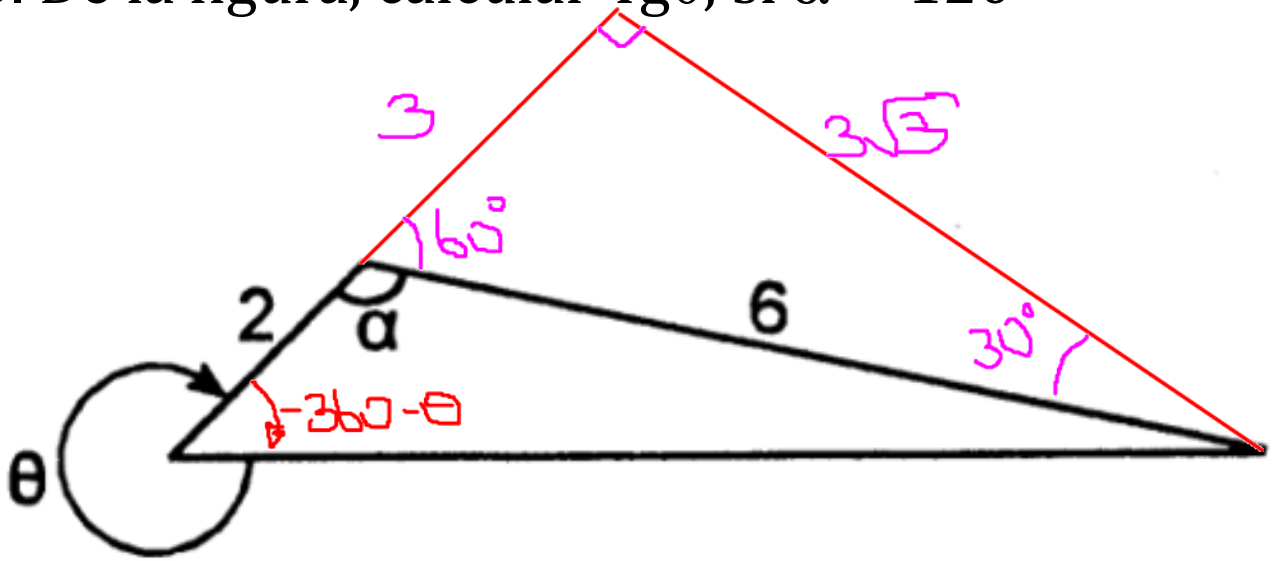
$E = \frac{1}{5}\left(\frac{15}{1}\right) + 4$

$E = 3 + 4 = 7$

A) 7 B) 47 C) 67 D) {7; 47} E) {7; 67}

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

15. De la figura, calcular Tgθ, si $\alpha = 120°$



$$Tg(-360-\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

$$Tg\,\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{-3\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{-2\sqrt{3}}{5}$

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

16. Si: $\text{Senx}^{\text{Senx}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; calcular Tgx, si $x \in$ IIC

$$S_x^{S_x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

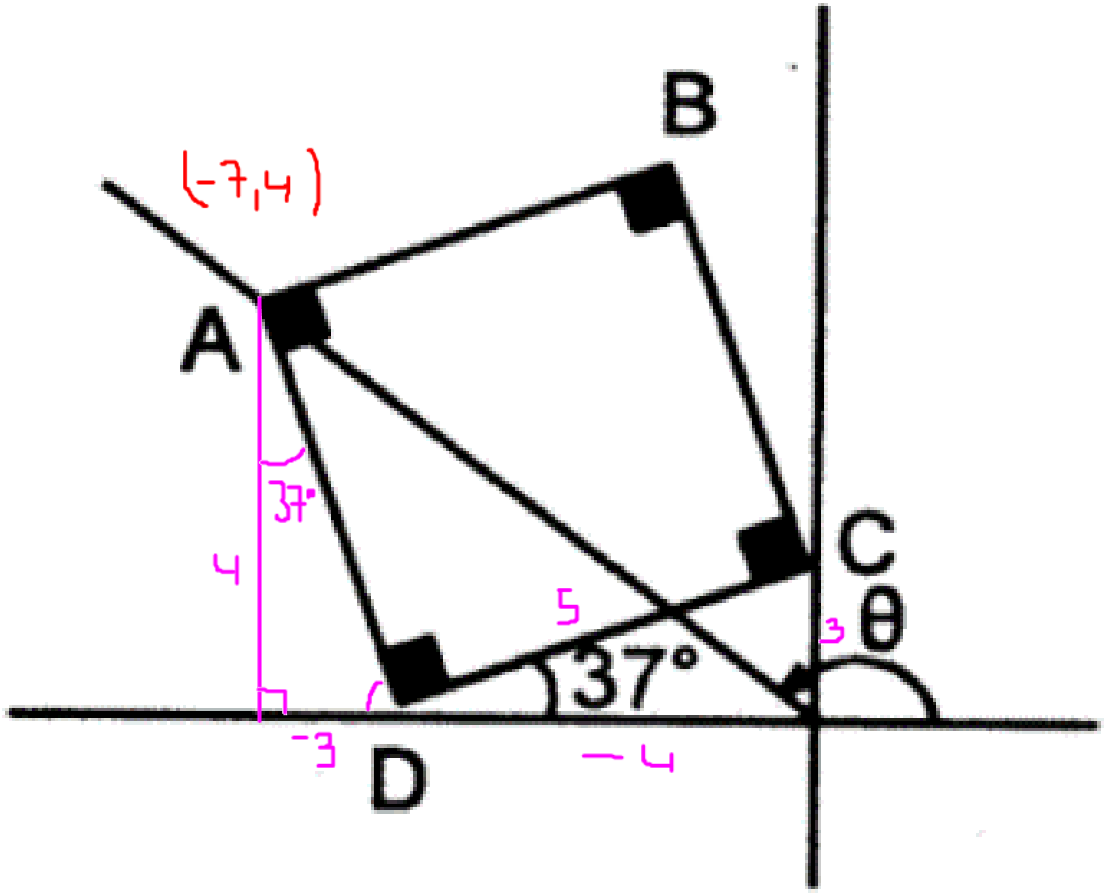
$$\text{Sen}x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 150^\circ$$

$$\text{Tg}(180-30) = -\text{Tg}30 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}/3$ C) $-\sqrt{15}/15$ D) $-\sqrt{15}$ E) $-\sqrt{15}/2$

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

17. ABCD es un cuadrado. Calcular Tgθ



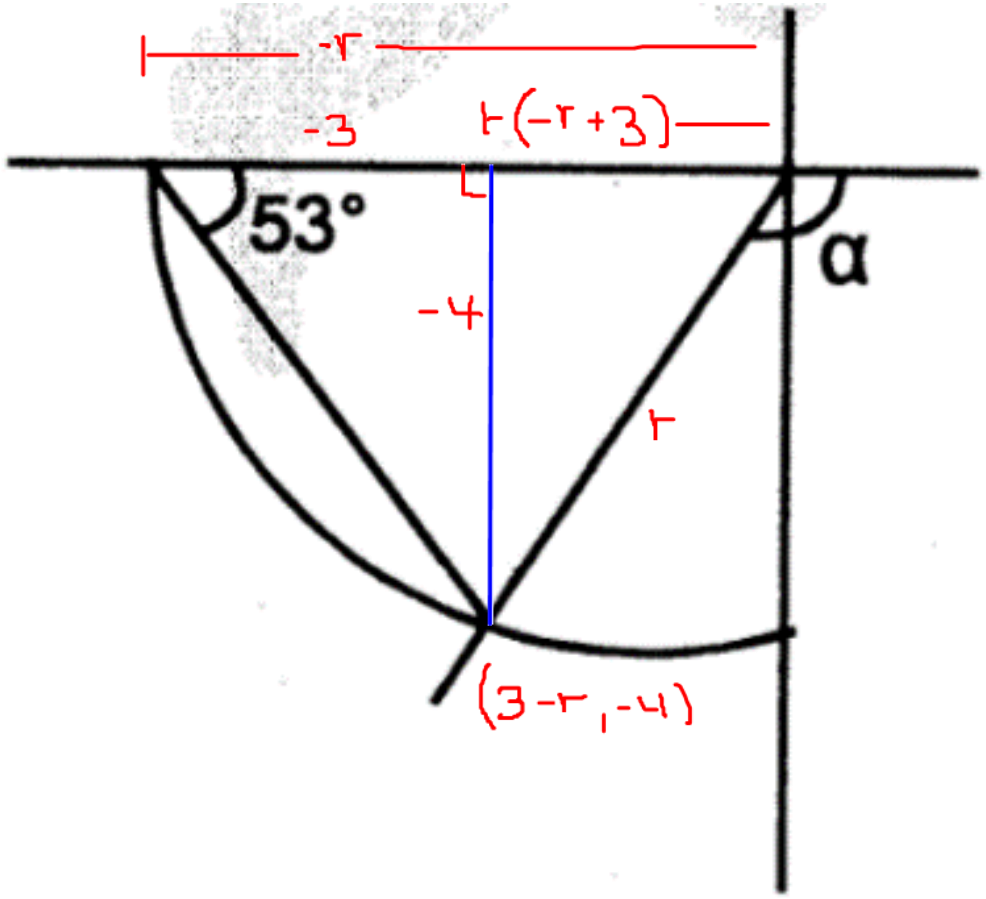
$$Tg\theta = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$$

A) -3/7 B) -4/7 C) -2/7

D) -1/7 E) -5/7

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

18. Calcular Senα



$r^2 = 16 + (-r+3)^2$

$r^2 = 16 + r^2 - 6r + 9$

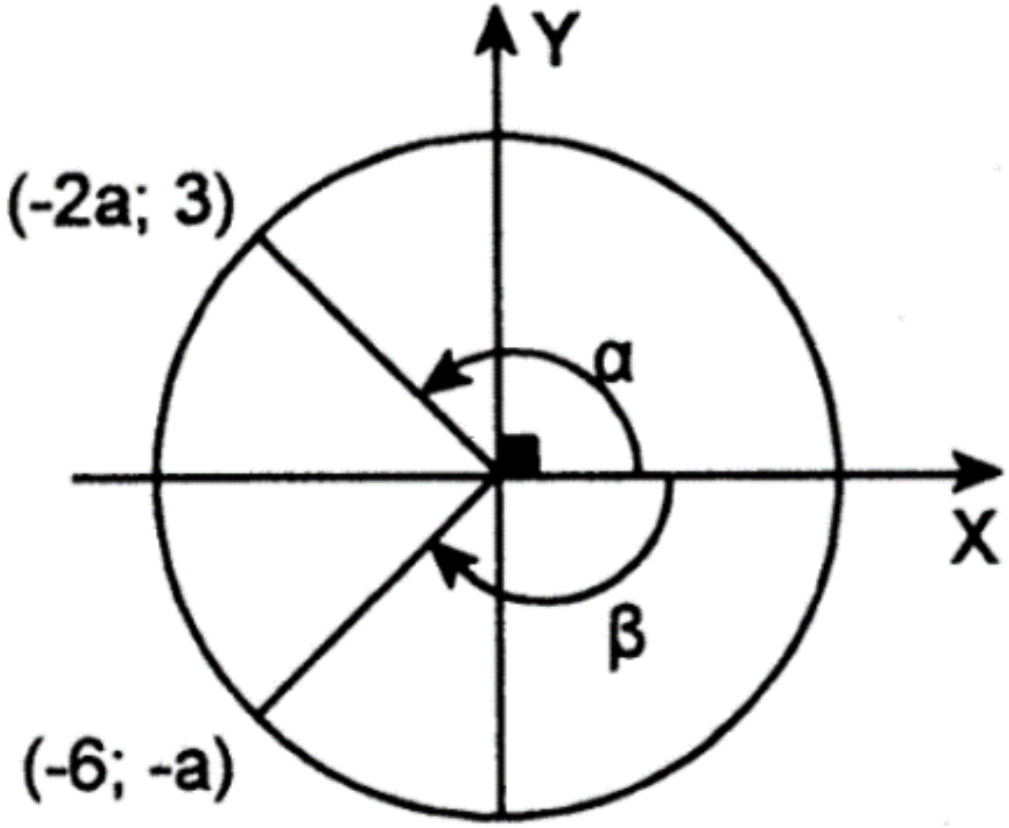
$6r = 25$

Piden: $\text{Sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\frac{25}{6}} = -\frac{24}{25} = -0,96$

A) -0,60 B) -0,62 C) -0,90 D) -0,96 E) -0,98

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

19. Del gráfico, calcular: $\cos\alpha \cdot \operatorname{Sen}\beta$



A) -5/2 B) 2/5 C) -1/5

D) -2/5 E) -5/2

POSICIÓN ESTANDAR – REDUCCIÓN AL 1ER CUADRANTE

20.Simplificar: $A = \frac{Sen(180°-a)Cos(90°-a)Tg(180°-a)}{Ctg(90°-a)Sec(90°-a)Csc(180°-a)}$

A) Sen^4a B) $-Sen^4a$ C) Csc^4a

D) $-Csc^4a$ E) $-Cos^4a$

PITAGORAS ACADEMIA

TRIGONOMETRIA

CLAVES									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30